XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 15 октября 2008.

Четвертый тур. Лига стратегий

1. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точка M – середина стороны BC, а N – точка пересечения AM и EF. Прямые BI и CI вторично пересекают окружность, построенную на BC, как на диаметре, в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа. Обозначим через S_i сумму всех этих чисел, кроме a_i. Какое максимальное значение может принимать величина

$$\frac{\text{НОД}(a_1, S_1) + \text{НОД}(a_2, S_2) + \ldots + \text{НОД}(a_n, S_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

в зависимости от n при $n \geqslant 2$?

3. Докажите, что при $2008 \leqslant k \leqslant n$

$$2\sqrt[n]{C_n^k} \geqslant \sqrt[n]{C_n^{k-1}} + \sqrt[n]{C_n^{k+1}}.$$

4. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

5. Отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что отрезок A_1B_1 пересекает вписанную окружность треугольника ABC.

6. Докажите, что для натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ все (комплексные) корни многочлена $1 + z^{n_1} + z^{n_2} + \ldots + z^{n_k}$ по модулю не превосходят $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7. В графе с $n \geqslant 10$ вершинами степени равны $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Оказалось, что $d_i + d_{n+1-i} \geqslant n$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

8. Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n.$$

9. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре CD берутся всевозможные точки M. Докажите, что ортоцентры всех треугольников AMB лежат на одной окружности.

10. Пусть X – конечное множество. Докажите, что

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|,$$

где обе суммы берутся по всем наборам k множеств $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k \subset X$. (Здесь $|S|$ обозначает число элементов множества S).

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 15 октября 2008.

Четвертый тур. Лига стратегий

1. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точка M – середина стороны BC, а N – точка пересечения AM и EF. Прямые BI и CI вторично пересекают окружность, построенную на BC, как на диаметре, в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа. Обозначим через S_i сумму всех этих чисел, кроме a_i. Какое максимальное значение может принимать величина

$$\frac{\text{НОД}(a_1, S_1) + \text{НОД}(a_2, S_2) + \ldots + \text{НОД}(a_n, S_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

в зависимости от n при $n \geqslant 2$?

3. Докажите, что при $2008 \leqslant k \leqslant n$

$$2\sqrt[n]{C_n^k} \geqslant \sqrt[n]{C_n^{k-1}} + \sqrt[n]{C_n^{k+1}}.$$

4. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

5. Отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что отрезок A_1B_1 пересекает вписанную окружность треугольника ABC.

6. Докажите, что для натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ все (комплексные) корни многочлена $1 + z^{n_1} + z^{n_2} + \ldots + z^{n_k}$ по модулю не превосходят $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7. В графе с $n \geqslant 10$ вершинами степени равны $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Оказалось, что $d_i + d_{n+1-i} \geqslant n$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

8. Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n.$$

9. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре CD берутся всевозможные точки M. Докажите, что ортоцентры всех треугольников AMB лежат на одной окружности.

10. Пусть X – конечное множество. Докажите, что

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|,$$

где обе суммы берутся по всем наборам k множеств $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k \subset X$. (Здесь $|S|$ обозначает число элементов множества S).